Sommaire

Les séries de Fourier sont des séries de fonctions périodiques.
L'objet est de décomposer un signal périodique en somme de sinus et cosinus de fréquences égales à, et multiples de, la fréquence du signal de base.

1. Espace Vectoriel $\mathscr{C}_T(\mathbb{R})$ des applications continues, T-périodiques

1.1. Espace vectoriel $\mathscr{C}_T(\mathbb{R})$

Théorème :
$\mathscr{C}_T(\mathbb{R})$, l'ensemble des applications **continues**, T-périodiques, $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est un espace vectoriel réel.

Démonstration : C'est clairement un sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ puisque
- $\mathscr{C}_T(\mathbb{R})$ est non vide,
- une combinaison linéaire d'applications T-périodique est T-périodique.

■

1.2. Norme et produit scalaire sur $\mathscr{C}_T(\mathbb{R})$

Théorème : Sur $\mathscr{C}_T(\mathbb{R})$: $\langle f, g\rangle = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_{\alpha}^{\alpha+T} f(t)g(t)\,dt$ est un produit scalaire.

La norme associée est : $\|f\| = \sqrt{\dfrac{1}{T}\displaystyle\int_{\alpha}^{\alpha+T} f^2(t)\,dt}$

> Si les applications sont simplement **continues par morceaux**,
> $\langle f, g\rangle = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_{-T/2}^{T/2} f(t)g(t)\,dt$ est une forme bilinéaire symétrique positive.

Démonstration :
- $\langle \cdot, \cdot\rangle$ est clairement bilinéaire symétrique, par linéarité de l'intégrale.
- $\langle f, f\rangle = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_{\alpha}^{\alpha+T} f^2(t)\,dt \geqslant 0$, la forme quadratique est positive.
- $\langle f, f\rangle = 0 \Rightarrow \displaystyle\int_{\alpha}^{\alpha+T} f^2(t)\,dt = 0$, on applique le théorème des 3 conditions à : $t \to f^2(t)$.
  Cette application est :
  - positive,
  - continue,
  - d'intégrale nulle sur $[\alpha, \alpha+T]$,

donc $\forall t \in [\alpha, \alpha + \mathrm{T}]$, $f^2(t) = 0$, donc $f(t) = 0$ et comme f est T-périodique, $\forall t \in \mathbb{R}$, $f(t) = 0$ et donc $f = 0$.

$\langle \cdot, \cdot \rangle$ est donc bien bilinéaire symétrique, définie positive, c'est un produit scalaire. ■

1.3. Famille orthogonale

Théorème : La famille $\{(t \to \cos n\omega t)_{n\in\mathbb{N}}, (t \to \sin n\omega t)_{n\in\mathbb{N}^*}\}$ est orthogonale pour ce produit scalaire.

Démonstration : Il faut vérifier que ces applications sont 2 à 2 orthogonales.

$$\frac{1}{\mathrm{T}}\int_0^{\mathrm{T}} \cos n\omega t \cos p\omega t \; \mathrm{d}t = \frac{1}{2\mathrm{T}}\int_0^{\mathrm{T}} \cos(n+p)\,\omega t + \cos(n-p)\,\omega t \; \mathrm{d}t = 0 \;\; (n \neq p)$$

$$\frac{1}{\mathrm{T}}\int_0^{\mathrm{T}} \sin n\omega t \sin p\omega t \; \mathrm{d}t = \frac{1}{2\mathrm{T}}\int_0^{\mathrm{T}} \cos(n-p)\,\omega t - \cos(n+p)\,\omega t \; \mathrm{d}t = 0 \;\; (n \neq p)$$

$$\frac{1}{\mathrm{T}}\int_0^{\mathrm{T}} \cos n\omega t \sin p\omega t \; \mathrm{d}t = \frac{1}{2\mathrm{T}}\int_0^{\mathrm{T}} \sin(n+p)\,\omega t + \sin(p-n)\,\omega t \; \mathrm{d}t$$

$$= -\frac{1}{2\mathrm{T}}\left[\frac{\cos(n+p)\,\omega t}{n+p} + \frac{\cos(p-n)\,\omega t}{p-n}\right]_0^{\mathrm{T}} = 0$$

On a fait ce dernier calcul quand $n \neq p$ mais le résultat est le même quand $p = n$ car le deuxième sinus disparait directement. ■

1.4. Projection orthogonale de f

On va travailler ici pour les applications à valeur réelle.
Soit :

$$\mathrm{E}_n = Vect\,(1, \cos\omega t, \cos 2\omega t, \ldots, \cos n\omega t, \sin\omega t, \sin 2\omega t, \ldots, \sin n\omega t)$$

dont une base orthonormale est :

$$\left(1, \sqrt{2}\cos\omega t, \sqrt{2}\cos 2\omega t, \ldots, \sqrt{2}\cos n\omega t, \sqrt{2}\sin\omega t, \sqrt{2}\sin 2\omega t, \ldots, \sqrt{2}\sin n\omega t\right)$$

La projection orthogonale f sur E_n est donc :

$$p(f)(t) = \langle f, 1\rangle\, 1 + \sum_{k=1}^{n}\left\langle f, \sqrt{2}\cos k\omega t\right\rangle \sqrt{2}\cos k\omega t + \sum_{k=1}^{n}\left\langle f, \sqrt{2}\sin k\omega t\right\rangle \sqrt{2}\sin k\omega t$$

Pour simplifier, on appelle :
- a_0 : le terme constant ;
- a_k : le coefficient de $\cos k\omega t$ dans la projection ;
- b_k : le coefficient de $\sin k\omega t$ dans cette même projection.

Ce qui donne :
- $a_0 = \langle f, 1\rangle = \dfrac{1}{\mathrm{T}}\displaystyle\int_\alpha^{\alpha+\mathrm{T}} f(t)\;\mathrm{d}t$;
- $a_k = \left\langle f, \sqrt{2}\cos k\omega t\right\rangle \sqrt{2} = \dfrac{2}{\mathrm{T}}\displaystyle\int_\alpha^{\alpha+\mathrm{T}} f(t)\cos n\omega t\;\mathrm{d}t \quad$ pour $k \in \mathbb{N}^*$;
- $b_k = \left\langle f, \sqrt{2}\sin k\omega t\right\rangle \sqrt{2} = \dfrac{2}{\mathrm{T}}\displaystyle\int_\alpha^{\alpha+\mathrm{T}} f(t)\sin n\omega t\;\mathrm{d}t \quad$ pour $k \in \mathbb{N}^*$.

1.5. Formule de Parseval

Théorème : $f : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$,
f T-périodique, continue par morceaux sur $\mathbb{R}$, alors, $\sum a_n^2$ et $\sum b_n^2$ convergent, et on a :

$$\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \left|f^2(t)\right| dt = \frac{1}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T} \left|f^2(t)\right| dt = \left|a_0^2\right| + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\left|a_n^2\right| + \left|b_n^2\right|\right)$$

Si la fonction est réelle : $\displaystyle \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f^2(t)\ dt = \frac{1}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T} f^2(t)\ dt = a_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n^2 + b_n^2\right)$

Interprétons avec la projection du paragraphe précédent : la norme de cette projection de f sur E_n est :

$$\|p(f)\|^2 = \langle f, 1\rangle^2 + \sum_{k=1}^{n}\left\langle f, \sqrt{2}\cos k\omega t\right\rangle^2 + \sum_{k=1}^{n}\left\langle f, \sqrt{2}\sin k\omega t\right\rangle^2$$

$$= \left(\frac{1}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T} f(t)\ dt\right)^2 + \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T} f(t)\sqrt{2}\cos k\omega t\ dt\right)^2 + \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T} f(t)\sqrt{2}\sin k\omega t\ dt\right)^2$$

$$= \left(\frac{1}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T} f(t)\ dt\right)^2 + \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{2}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T} f(t)\cos k\omega t\ dt\right)^2 + \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{2}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T} f(t)\sin k\omega t\ dt\right)^2$$

$$= a_0^2 + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}a_k^2 + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}b_k^2$$

On voit bien que la formule de Parseval est la limite d'une égalité de normes.
Les $\frac{1}{2}$ viennent du fait que les cosinus et sinus ne sont pas de norme 1 mais de norme $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

2. Série de Fourier d'une application T-périodique

Pour une application f, T-périodique, continue par morceaux, on va pouvoir déterminer la série de Fourier de f en utilisant les coefficients calculés lors de l'étude de la projection orthogonale de f.
Dans un deuxième temps, il va falloir déterminer

- si la série de Fourier de f converge et, de plus,
- **quelle est sa somme**.

On verra que si f n'est pas continue et de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux, ce ne sera pas toujours $f(x)$ en tous points...

2.1. Coefficients de Fourier d'une application T-périodique continue par morceaux

Dans les séries de Fourier, assez souvent, on n'a de formule pour f que dans un certain intervalle, on veillera donc à n'utiliser cette formule que sur cet intervalle...

a/ Application T-périodique

Définition : $f:\mathbb{R}\to\mathbb{K}$, T-périodique, continue par morceaux sur $\mathbb{R}$. On pose, avec $\omega=\dfrac{2\pi}{T}$,

$$a_0=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\ \mathrm{d}t$$

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad a_n=\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos n\omega t\ \mathrm{d}t=\frac{2}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T} f(t)\cos n\omega t\ \mathrm{d}t$$

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad b_n=\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\sin n\omega t\ \mathrm{d}t=\frac{2}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T} f(t)\sin n\omega t\ \mathrm{d}t$$

Ce sont les coefficients de Fourier de f.
Et a_0 est la valeur moyenne de f.
Notons encore que, pour $n\in\mathbb{N}^*$, les a_n et les b_n sont deux fois une valeur moyenne.

Bien sûr, si f est à valeurs réelles, les coefficients de Fourier de f sont réels.

b/ Application paire ou impaire

- Si f est paire :
  - $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $b_n=0$
  - Les a_n se calculent sur la demi-période $[0,T/2]$,
    a_0 comme une valeur moyenne, les autres comme deux fois une valeur moyenne.
- Si f est impaire :
  - $\forall n\in\mathbb{N}$, $a_n=0$
  - Les b_n se calculent sur la demi-période $[0,T/2]$,
    comme deux fois une valeur moyenne.

c/ Symétrie glissée

Théorème : Soit T-périodique, continue par morceaux sur $\mathbb{R}$,
telle que $\forall x\in\mathbb{R}$, $f\left(x+\dfrac{T}{2}\right)=-f(x)$.
Alors : $\forall n\in\mathbb{N}$, $a_{2n}=0$, et, $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $b_{2n}=0$.

Démonstration : On le montre par exemple pour b_{2n}.
$$b_{2n}=\frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(2n\omega t)\,\mathrm{d}t=\frac{2}{T}\int_0^{T/2} f(t)\sin(2n\omega t)\,\mathrm{d}t+\frac{2}{T}\int_{T/2}^{T} f(t)\sin(2n\omega t)\,\mathrm{d}t$$
Dans cette dernière intégrale, on pose : $u=t-T/2$,
alors $f(t)=-f(u)$, et, $\sin(2n\omega t)=\sin(2n\omega u+n\omega T)=\sin(2n\omega u)$.
Enfin, les bornes devienne 0 et T/2.
Ce qui fait que : $b_{2n}=\dfrac{2}{T}\displaystyle\int_0^{T/2} f(t)\sin(2n\omega t)\,\mathrm{d}t-\dfrac{2}{T}\int_0^{T/2} f(u)\sin(2n\omega u)\,\mathrm{d}u=0$ ■

2.2. Série de Fourier associée à une application T -périodique continue par morceaux

a/ Application T-périodique

Définition :
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$, T-périodique, continue par morceaux sur $\mathbb{R}$, on appelle **série de Fourier de** f, la série

$$S(f)(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t) \quad \text{avec : } \omega = \frac{2\pi}{T}$$

Si f est paire, il n'y a pas de terme en sinus,
tandis que si f est impaire, il n'y a pas de terme en cosinus.

b/ Application 2π-périodique

Dans le cas où f est 2π-périodique,

$$S(f)(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt)$$

3. Convergence d'une série de Fourier : théorèmes de Dirichlet

Les théorèmes de convergence, délicats à montrer, seront admis.

A priori,
- rien n'assure que la série de Fourier converge en tous points ;
- et, en un point où la série de Fourier converge, rien n'assure que $S(f)(t) = f(t)$.

3.1. f de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux, T-périodique

Redonnons d'abord un exemple de fonction qui soit continue mais pas de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux, avec la figure 1, page suivante. Ce sont ici les tangentes verticales qui empèchent la classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux.

Théorème : f de classe $\mathscr{C}^1$ **par morceaux** sur $\mathbb{R}$, T-périodique
$\Rightarrow$ la série de Fourier de f converge en tous points, et est de somme

$$S(f)(t) = \frac{f(t+0) + f(t-0)}{2}$$

où $f(t+0)$ et $f(t-0)$ sont les limites à droite et à gauche de f.

En tous points où f est continue, on a : $S(f)(t) = f(t)$.
Il n'y a qu'aux points où f est discontinue qu'il risque d'y avoir $S(f)(t) \neq f(t)$.
On fera donc un graphe de la fonction sur un peu plus d'une période
- pour repérer les points de discontinuité,
- voir si la valeur au point est la demi-somme des limites à droite et à gauche,
- et vérifier de toutes façons le caractère $\mathscr{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$ de f.

Si, en un point de discontinuité, on n'a pas $f(t) = \dfrac{f(t+0) + f(t-0)}{2}$, alors, on considère une application $\widetilde{f}$ égale à f partout où elle est continue et $\widetilde{f}(t) = \dfrac{f(t+0) + f(t-0)}{2}$ là où f est discontinue.

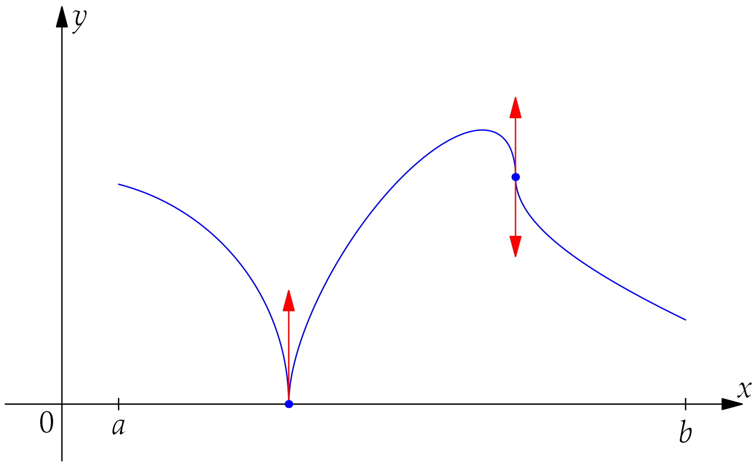

Figure 1 – **Exemple d'application continue mais pas de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux**

Comme il n'y a qu'en quelques points que f et $\widetilde{f}$ sont différentes, elles ont la **même série de Fourier**.

Définition : Pour une application f, T périodique et de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux, l'application $\widetilde{f} : t \mapsto \dfrac{f(t+0)+f(t-0)}{2}$ est appelée la régularisée de f.

Théorème : Par conséquent, la série de Fourier de f a pour somme $\widetilde{f}$.

3.2. f continue, de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$, T-périodique

Théorème : f **continue** et de classe $\mathscr{C}^1$ **par morceaux** sur $\mathbb{R}$, T-périodique
$\Rightarrow$ la série de Fourier de f converge en tous points, et : $\mathrm{S}(f)(t) = f(t)$.

3.3. Deux exemples

Nous allons « observer » la convergence des séries de Fourier de deux applications de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$, l'une continue, l'autre discontinue.

a/ f continue

Soit f paire, 2π périodique, valant $\dfrac{\pi}{2} - t$ sur $[0, \pi]$. Le calcul de la série de Fourier est simple. Les b_n sont nuls, les a_{2k} aussi par symétrie glissée, et les a_{2k+1} valent $\dfrac{4}{\pi(2k+1)^2}$.
Ainsi la série de Fourier est :

$$\mathrm{S}(f)(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}\cos(2k+1)\,x$$

On s'intéresse ici aux sommes partielles : $\mathrm{S}_{2p+1}(f)(x) = \dfrac{4}{\pi}\displaystyle\sum_{k=0}^{p}\frac{1}{(2k+1)^2}\cos(2k+1)\,x$

On ne dispose ici d'une formule explicite de $f(t)$ que sur $[0, \pi]$. On veillera avec soin à ne pas utiliser cette formule **en dehors** de cet intervalle !

On voit sur la figure 2, de la présente page, quelques sommes partielles de la série de Fourier de g.

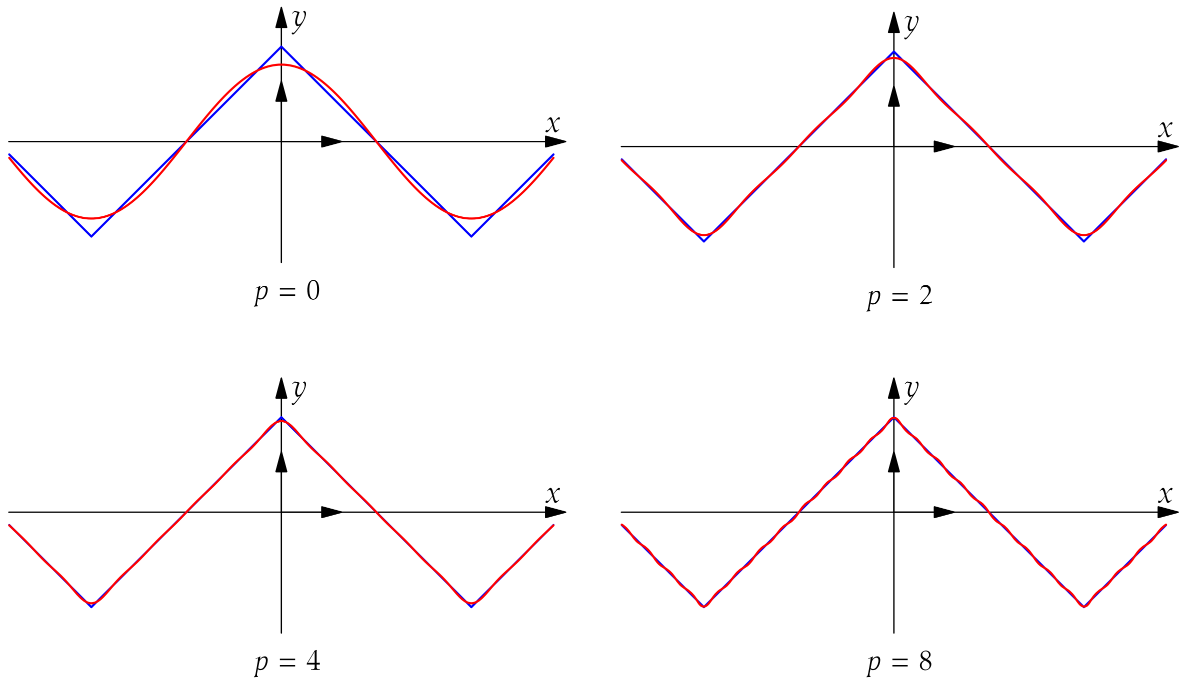

Figure 2 – **Sommes partielles de la série de Fourier pour une application continue**

On peut voir que la convergence de la série de Fourier vers la fonction est rapide.
Quelques harmoniques suffisent, un grand nombre n'apporte rien de plus.

b/ f discontinue

Soit g impaire, 2π périodique, valant 1 sur $]0, \pi[$. Elle vaut donc 0 en 0 et en π. Le calcul de la série de Fourier est simple. Les a_n sont nuls, les b_{2k} aussi par symétrie glissée, et les b_{2k+1} valent $\dfrac{4}{\pi\,(2k+1)}$.
Ainsi la série de Fourier est :

$$\mathrm{S}(g)(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{2k+1}\sin\,(2k+1)\,x$$

On s'intéresse ici aux sommes partielles : $\mathrm{S}_{2p+1}(g)(x) = \dfrac{4}{\pi}\displaystyle\sum_{k=0}^{p}\frac{1}{2k+1}\sin\,(2k+1)\,x$

On voit sur la figure 3, page suivante, quelques sommes partielles de la série de Fourier de g.
On voit ici que la discontinuité entraîne une convergence beaucoup plus lente et qu'il faut un grand nombre d'harmoniques pour « recopier » avec précision le signal.

4. Petits compléments

4.1. Quelques valeurs utiles

On n'oubliera pas que pour $n \in \mathbb{Z}$, $e^{in\pi} = (-1)^n$, $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$, $\cos n\pi = (-1)^n$, $\sin n\pi = 0$.
On a aussi bien sûr, toujours pour $n \in \mathbb{Z}$, $\sin\left((2n+1)\dfrac{\pi}{d2}\right) = (-1)^n$.

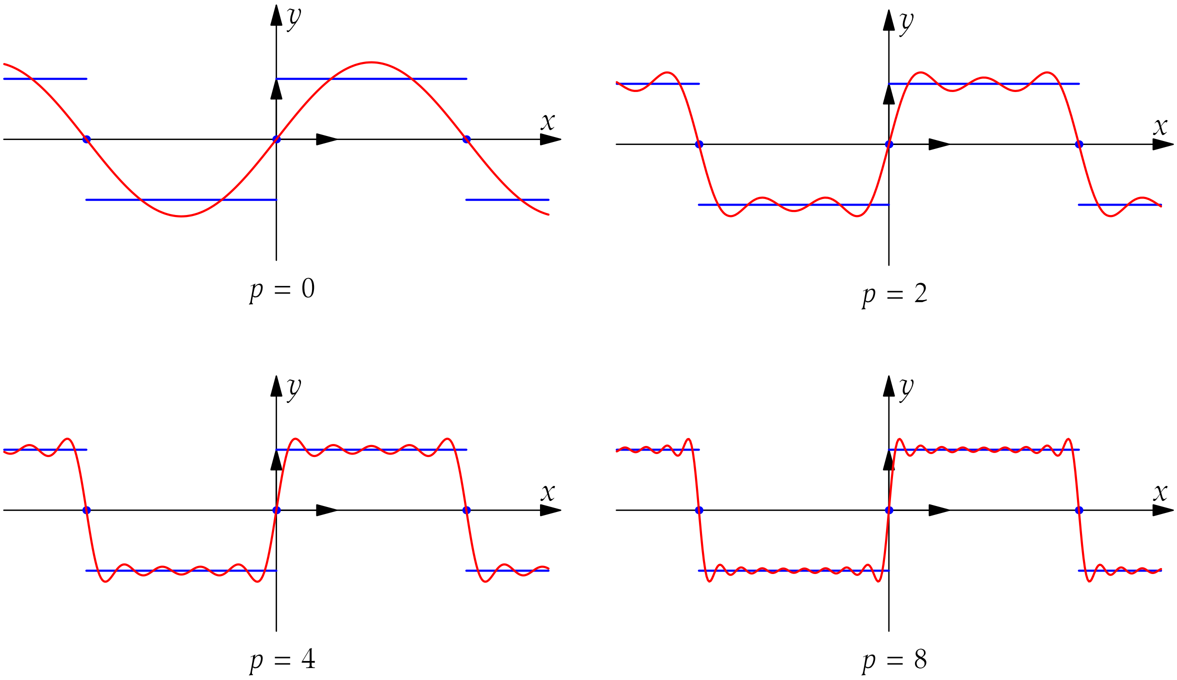

Figure 3 – **Sommes partielles de la série de Fourier pour une application discontinue**

4.2. Sommation de certaines séries numériques

Les série de Fourier permettent de calculer facilement la somme de certaines séries numériques.

On considère donc : $f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt)$ d'un coté

et $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ d'un autre. (cas de la période 2π)

- Si les u_n « ressemblent » aux a_n ou aux b_n.
  Alors, on obtient la somme en prenant une valeur particulière de t. Le plus souvent, on essaye $0, \pi, \frac{\pi}{2}$...
- Si les u_n « ressemblent » aux a_n^2 ou aux b_n^2. (avec en plus un module s'ils ne sont pas réels)
  Alors, on obtient la somme en utilisant la formule de Parseval.